

Correction SIGMA n°3A

Exercice 1 - Inspiré EML 2003

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque alors que

$$A^3 = A^2 + 2A.$$

2. Supposons que la matrice A est inversible. On a alors

$$A^3 = A^2 + 2A \iff A^2 = A + 2I_3$$

Or,

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq A^2$$

Donc, par l'absurde, A n'est pas inversible.

3. On montre par récurrence les propositions :

$$\mathcal{P}_n = \{ \text{Il existe un unique couple } (a_n, b_n) \text{ tel que } A^n = a_n A + b_n A^2 \}.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on pose $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. On a bien $A = a_1 A + b_1 A^2$.

Hérédité : On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain rang $n \geq 1$. Il existe donc un unique couple (a_n, b_n) tel que $A^n = a_n A + b_n A^2$. On a alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= a_n A^2 + b_n A^3 \\ &= a_n A^2 + b_n (A^2 + 2A) \\ &= 2b_n A + (a_n + b_n) A^2 \end{aligned}$$

Donc en posant

$$a_{n+1} = 2b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n + b_n$$

on a bien $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} A^2$. La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : On a $A^n = a_n A + b_n A^2$ où (a_n) et (b_n) sont les suites définies par $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et

$$\boxed{a_{n+1} = 2b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n + b_n}$$

4. (a) D'après les résultats précédents, on a

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2b_{n+1} = 2(a_n + b_n) \\ &= 2a_n + 2b_n \end{aligned}$$

Et comme $2b_n = a_{n+1}$, on a bien

$$\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n.}$$

(b) On remarque que (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout l'équation

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 + 8 = 9$. L'équation admet donc 2 solutions

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Il existe donc λ et β tel que

$$a_n = \lambda \times (-1)^n + \beta \times 2^n$$

On utilise le fait que $a_1 = 1$ et $a_2 = 2b_1 = 0$. On résout le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\lambda + 2\beta &= 1 \\ \lambda + 4\beta &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -\lambda + 2\beta &= 1 \\ 6\beta &= 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda + \frac{1}{3} &= 1 \\ \beta &= \frac{1}{6} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda &= -\frac{2}{3} \\ \beta &= \frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{a_n = \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} + \frac{1}{3} \times 2^{n-1}.}$$

On en déduit que

$$\boxed{b_n = \frac{1}{3} \times (-1)^n + \frac{1}{6} \times 2^n.}$$

(c) On conclut

$$\boxed{A^n = \left(\frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} + \frac{1}{3} \times 2^{n-1} \right) A + \left(\frac{1}{3} \times (-1)^n + \frac{1}{6} \times 2^n \right) A^2.}$$

Exercice2 - Inspiré ECRICOME 2008

On considère pour $p \in \mathbb{N}^*$ les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f_p(x) = 1 + \ln(x + p) \\ h_p(x) = x - f_p(x) \end{cases}$$

On note (\mathcal{C}_p) la courbe représentative de la fonction f_p .

1. Étude de la fonction f_1 .

(a) On a $f_1(x) = 1 + \ln(1 + x)$. On résout

$$1 + x > 0 \iff x > -1$$

Donc

$$\boxed{f_1 \text{ est définie et dérivable sur }]-1, +\infty[}$$

(b) On dérive la fonction f_1 . Pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0.$$

La fonction f_1 est strictement croissante sur $] - 1, +\infty[$. On a les limites

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f_1(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$$

x	-1	$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$	+	
Variations de f_1		

(c) Le développement limité en $x = 0$ de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 1 est (en notant $\varepsilon(x)$ une fonction tendant vers 0 quand x tend vers 0.

$$\ln(1 + x) = x + \varepsilon(x)$$

Donc,

$$\boxed{f_1(x) = 1 + x + x\varepsilon(x).}$$

(d) On en déduit que l'équation de la tangente en 0 est donnée par

$$\boxed{y = 1 + x}$$

(e) La fonction f_1 est de classe \mathcal{C}^2 sur $] - 1, +\infty[$. On calcule la dérivée seconde de f_1 . On a

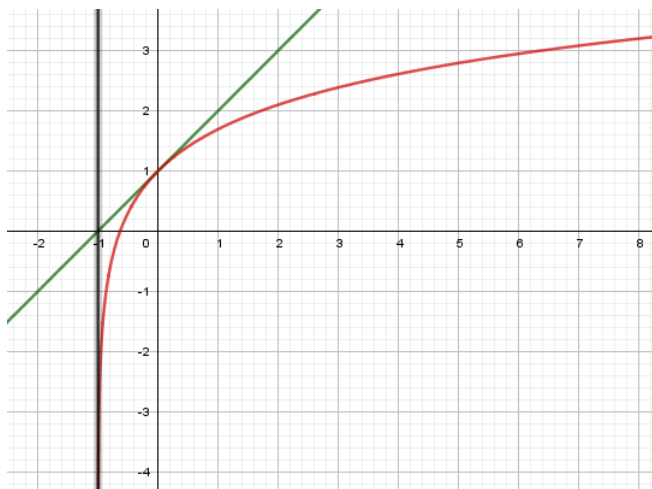
$$f_1''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } f_1 \text{ est donc concave sur }] - 1, +\infty[.}$$

(f) La fonction f_1 étant concave sur $] - 1, +\infty[$, elle est en dessous de toutes ses tangentes.

La courbe \mathcal{C}_1 est en dessous de sa tangente.

(g) On trace la courbe avec la tangente en 0 et l'asymptote verticale en $x = -1$.



2. Étude d'une suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

(a) On a $h_p(x) = x - f_p(x) = x - 1 - \ln(x + p)$. La fonction h_p est dérivable sur $] -p, +\infty[$ et

$$h'_p(x) = 1 - \frac{1}{x + p} = \frac{x + p - 1}{x + p}.$$

Comme $p \geq 1$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h'_p(x) > 0$. La fonction h_p est donc strictement croissante. D'une part, on a

$$h_p(0) = -1 - \ln(p) < 0.$$

D'autre part,

$$h_p(x) = x - 1 - \ln(x + p) = x - 1 - \ln(x(1 + p/x)) = x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(1 + p/x)}{x} \right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + p/x)}{x} = 0$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_p(x) = +\infty$$

Donc h_p est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc bijective de $]0, +\infty[$ dans $] -1 - \ln(p), +\infty[$.

Et comme 0 appartient à cet intervalle, l'équation $h_p(x) = 0$ a une unique solution α_p sur $]0, +\infty[$.

Conclusion : l'équation $f_p(x) = x$ admet une unique solution α_p sur $]0, +\infty[$

(b) On a $f_{p+1}(x) = 1 + \ln(x + p + 1)$ donc $f_{p+1}(\alpha_{p+1}) = 1 + \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) = \alpha_{p+1}$ et

$$h_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1} + p) = \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) - \ln(\alpha_{p+1} + p).$$

Et comme

$$\begin{aligned} \alpha_{p+1} + p + 1 &> \alpha_{p+1} + p \\ \iff \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) &> \ln(\alpha_{p+1} + p) \end{aligned}$$

$$h_p(\alpha_{p+1}) > 0$$

On a donc $h_p(\alpha_{p+1}) > 0 = h_p(\alpha_p)$ et comme la fonction h_p est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et bijective alors $\alpha_{p+1} > \alpha_p$.

la suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

(c) On compare les images par h_p . D'une part, $h_p(\alpha_p) = 0$ et

$$\begin{aligned} h_p(1 + \ln(p)) &= 1 + \ln(p) - 1 - \ln(p + 1 + \ln(p)) \\ &= \ln(p) - \ln(p + 1 + \ln(p)) \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} p + 1 + \ln(p) &> p \\ \iff \ln(p) &< \ln(p + 1 + \ln(p)) \\ \iff h_p(1 + \ln(p)) &< 0 = h_p(\alpha_p). \end{aligned}$$

Donc (h_p strictement croissante)

Conclusion : $\alpha_p \geq 1 + \ln(p)$ et par minoration,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_p = +\infty$$

3. Valeur approchée de α_1 .

On admet que le réel α_1 appartient à l'intervalle $[1, 3]$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

(a) On montre par récurrence les propositions :

$$\mathcal{P}_n = \{u_n \geq 1\}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \geq 1$. La proposition \mathcal{P}_0 est donc vraie.

Hérédité : On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} u_n \geq 1 &\implies f_1(u_n) \geq f_1(1) \quad \text{La fonction } f_1 \text{ est croissante} \\ &\implies u_{n+1} \geq 1 + \ln(2) \geq 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$$

(b) On regarde si la dérivée est bornée par $\frac{1}{2}$. La question précédente ($u_n \geq 1$ suggère que l'on doit s'intéresser à l'intervalle $[1, +\infty[$). D'après la première partie,

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x}$$

Or, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $0 < f_1'(x) \leq \frac{1}{2}$ Donc

— f_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur $I = [1, +\infty[$

- $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ et $\alpha_1 \in I$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finies

$$|f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|$$

c'est à dire

$$\boxed{|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|}$$

(c) On montre par récurrence les propositions :

$$\mathcal{P}_n = \{|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $\alpha_1 \in [1, 3]$ donc $|u_0 - \alpha_1| \leq 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$. La proposition \mathcal{P}_0 est donc vraie.

Hérédité : On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha_1| &\leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1| \quad \text{d'après la question précédente} \\ \implies |u_{n+1} - \alpha_1| &\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ \implies |u_{n+1} - \alpha_1| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

(d) Si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4}$ alors $|u_n - \alpha_1| \leq 10^{-4}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4} &\iff (n-1) \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -4 \ln(10) \\ &\iff (n-1) \geq 4 \ln(10) / \ln(2) \\ &\iff n \geq 1 + 4 \ln(10) / \ln(2) \end{aligned}$$

qui est réalisé par la partie entière plus 1.

Conclusion : $n_0 = \lfloor 1 + 4 \ln(10) / \ln(2) \rfloor + 1$ la condition est réalisée.

(e) Programme Scilab

```
n0 = floor(1+ 4 * log(10)/log(2)) + 1
u = 1
for k = 1 : n0
    u = 1 + log(1+u)
end
disp (n0, u)
```

Exercice 3 - Inspiré ECRICOME 2009

Liminaire

Soient x un réel dans l'intervalle $[0, 1[$, n un entier naturel non nul et S_n la fonction définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

1. Comme $x \neq 1$, on a

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

2. S_n est dérivable sur $[0, 1[$ et

$$\begin{aligned} S'_n(x) &= 0 + \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \\ &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport.

Partie 1.

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X , exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $E(X) = m$ et la centrée-réduite $X^* = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ donc

$$P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

D'après l'énoncé, $m = E(X) = 5$ et $P(X \leq 7) = P\left(\frac{X - 5}{\sigma} \leq \frac{2}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.8413$ donc $\frac{2}{\sigma} = 1$ et $\sigma = 2$

$$\text{Conclusion : } \boxed{m = 5 \text{ et } \sigma = 2}$$

2. $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - \Phi\left(\frac{9 - 5}{2}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\text{la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes vaut } 0,0228}$$

3. On demande

$$\begin{aligned} P_{X>3}(X \leq 7) &= \frac{P(X \leq 7 \cap X > 3)}{P(X > 3)} \\ &= \frac{P(3 < X \leq 7)}{P(X > 3)} = \frac{P(-1 < X^* \leq 1)}{P(X^* > -1)} \end{aligned}$$

$$P(X^* > -1) = 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1) = 0,8413$$

$$P(-1 < X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0,6826$$

$$\text{Conclusion : } P_{X>3}(X \leq 7) = \frac{0,6826}{0,8413}$$

4. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.

(a) La probabilité de retard inférieur à 7 minute est de p chaque jour.

Les retard sont indépendants. Donc sur 10 jours,

$$\text{Conclusion : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(10, p), E(Y) = 10p \text{ et } V(Y) = 10p(1-p)$$

(b) On définit par Z la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.

En notant A_k l'événement "le bus a moins de 7 minutes de retard le jour k "

$$\begin{aligned} [Z = 0] &= \bigcap_{k=1}^{10} A_k \text{ indépendants donc} \\ P[Z = 0] &= \prod_{k=1}^{10} P(A_k) = p^{10} \\ [Z = k] &= \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i \cap \overline{A_k} \text{ donc} \\ P[Z = k] &= p^{k-1}(1-p) \text{ pour } k \in [[1, 10]] \end{aligned}$$

D'où l'espérance :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^{10} kP(Z = k) \\ &= 0P(Z = 0) + \sum_{k=1}^{10} kp^{k-1}(1-p) \\ &= (1-p) \sum_{k=1}^{10} kp^{k-1} \\ &= \frac{10p^{11} - 11p^{10} + 1}{(1-p)} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } E(Z) = \frac{10p^{11} - 11p^{10} + 1}{(1-p)}$$

5. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :

- Le premier jour, il prend le bus.
- Si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
- Si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

On note p_n la probabilité de l'événement A_n = " Monsieur Thurman prend le bus le jour n "

- (a) Pour tout entier naturel n non nul, $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'événements donc

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n})$$

La probabilité d'attendre moins de 7 minutes étant p : $P_{A_n}(A_{n+1}) = P(\text{"moins de 7 min"}) = p$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ quand on a pris le métro.

Enfin $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n)$ donc

$$P(A_{n+1}) = p p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n)$$

$$\text{Conclusion : } p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right)p_n + \frac{1}{2}$$

- (b) Soit α le réel vérifiant :

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(p - \frac{1}{2}\right)\alpha + \frac{1}{2} \iff \left(\frac{3}{2} - p\right)\alpha = \frac{1}{2} \\ &\iff \alpha = \frac{1}{3 - 2p} \end{aligned}$$

On a $p_{n+1} - \alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right)(p_n - \alpha)$ donc la suite $(p_n - \alpha)$ est géométrique de raison $\left(p - \frac{1}{2}\right)$ et de premier terme : $p_1 - \alpha = 1 - \alpha$

Donc $(p_n - \alpha) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1}(1 - \alpha)$ et

$$\text{Conclusion : } p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1}(1 - \alpha) + \alpha \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

- (c) Comme $\left|p - \frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0$ et $p_n \rightarrow \alpha$

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \alpha$$

Partie 2.

1. Le nombre d'appels reçus par le standard d'une société de taxis pendant une période de durée t suit une loi de Poisson Y_t de paramètre λt , λ étant une constante strictement positive. Une origine de temps étant choisie, on note T la variable aléatoire réelle représentant le temps d'attente du premier appel vers ce standard. Par convention $P(T \leq t) = 0$ pour $t < 0$.

$$(a) \text{ Conclusion : } P[Y_t = k] = \frac{(\lambda t)^k \exp(-\lambda t)}{k!} \text{ et } E(Y_t) = V(Y_t) = \lambda t$$

- (b) $[Y_t = 0]$ signifie que pendant la période $[0, t]$ il n'y a eu aucun appel, c'est à dire que le premier appel n'est arrivé qu'après t .

Conclusion : $[Y_t = 0] = [T > t]$ donc ils ont même probabilité et

$$\text{Conclusion : } P[T > t] = \exp(-\lambda t) \text{ et } P[T \leq t] = 1 - \exp(-\lambda t) \text{ pour tout } t \geq 0$$

- (c) On a donc $F_T(t) = P[T \leq t] = 1 - \exp(-\lambda t)$ si $t \geq 0$ et $F_T(t) = 0$ si $t < 0$ et on reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle

(on peut, sinon, chercher d'abord la densité,, après avoir vérifié que F_t était continue sur \mathbb{R} et C^1 sur \mathbb{R}^* : $F'_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ si $t > 0$ et 0 si $t < 0$)

$$\text{Conclusion : } T \hookrightarrow \varepsilon(\lambda) \text{ donc } E(T) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(t) = \frac{1}{\lambda^2}$$

2. La durée, exprimée en heures, du transport d'un client par la société est une variable aléatoire U à densité dont une densité est donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = t e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

- (a) g est positive et continue par morceaux sur \mathbb{R}

$$\int_{-\infty}^0 g = \int_{-\infty}^0 0 \text{ converge et est nulle}$$

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1 \text{ (espérance d'une loi } \varepsilon(1) \text{)}$$

(on peut aussi calculer l'intégrale partielle en intégrant par parties)

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ converge et vaut 1.

Conclusion : g est bien une densité de probabilité.

- (b) On cherche si l'espérance de U existe :

U a une espérance et $E(U) = 2$ durée moyenne de transport.